普通高中教科书

数学

SHUXUE

必修

第一册

主　编　彭双阶

湖北教育出版社

主　　编： 彭双阶

副 主 编： 徐胜林　胡典顺　郭熙汉

本册主编： 徐胜林

主要编者： 徐胜林　梅全雄　孔凡祥　胡典顺　郭熙汉

刘运新

shuxue

致高中生

高中数学是一门非常重要的课程．数学以其卓越的智力成就被人们尊称为“科学的皇后”．数学是人类最高超的智慧活动，是人类心灵最独特的创造，是形成人类文化的主要力量，是人类文明的核心部分，是认识世界和创造世界的一把关键钥匙．

我们需要数学，因为作为人类文明发展标志的数学，是人类文化的重要组成部分．数学既是一种睿智的文化、一种思想的体操，更是现代科技进步中理性文化的核心．

我们需要数学，因为数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用．数学素养是现代社会公民应该具备的一种必备品格．

我们需要数学，因为数学是刻画自然规律和社会现象的特殊语言和有力工具，是自然科学、技术科学的基础，在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越强大的作用．

我们需要数学，因为数学已经渗透到现代社会和人们日常生活的各个方面．学好数学是提升生活质量、优化生活品质的重要保证．

本套教科书以《普通高中数学课程标准（2017 年版）》为依据来编写，遵循了现代数学教与学的规律，着眼于 21 世纪现代生活和未来发展，力求提升同学们的数学核心素养，更快地适应未来社会的发展．

教科书是教与学的一种重要资源．在使用本套教科书的同时，我们还应该多关注现实生活，关注社会进步和科技发展，用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界．现代社会是信息社会，又是终身学习的社会．在这个大数据时代，我们可以根据实际条件，选择利用计算机与互联网，丰富学习资源，提高学习效率．积极参与数学活动，勤于思考，敢于质疑，乐于合作交流，克难奋进，砥砺前行，养成良好的数学学习习惯，让数学学习变得更加生动活泼、富有情趣．

亲爱的同学们，插上快乐的翅膀，带着青春的梦想，在浩瀚的数学海洋扬帆奋进吧！

Mulu

目 录

第 1 章 集合

1.1 集合的概念与表示 …… 4
1.2 集合的基本关系 …… 8
阅读与讨论：希尔伯特旅馆——无限集 …… 10
1.3 集合的基本运算 …… 12
复习题 …… 16
思考与实践 …… 17

第 2 章 常用逻辑用语

2.1 充分条件与必要条件 …… 20
2.2 全称量词与存在量词 …… 23
复习题 …… 27
思考与实践 …… 27

Mulu

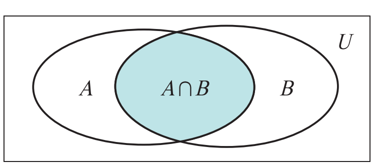
第 3 章 不等式初步

3.1 相等关系与不等关系 …… 30
3.2 等式与不等式的性质 …… 32
3.3 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式 …… 34
3.4 基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$（$a>0$，$b>0$） …… 40
阅读与讨论：类比推理 …… 45
复习题 …… 47
思考与实践 …… 48

第1章 集 合

计算机中“我的文档”文件夹

1.1 集合的概念与表示
1.2 集合的基本关系
阅读与讨论：希尔伯特旅馆——无限集
1.3 集合的基本运算
复习题
思考与实践



Venn 图

数学的学习与交流需要数学语言. 在我们已经掌握的数学语言中，有自然语言，也有图形语言，但这仍然是不够的. 比如，一元一次不等式可能有无穷多个解，我们需要简洁、准确地表达这些解，以便由相应的记号就足以把握解的状态；又如，给定角的平分线，它由一些点构成，我们也需要简洁、准确地表示这些点，以便明了它们的共同特征；再如，在处理一批数据时，也需要简洁、准确地表达它们，以便有效地对事物进行比较和分类. 我们以后研究的数学对象更是需要一种新的数学语言来有效地表达. 而且，还要在这种表达的基础上，研究它们的性质，探讨它们的关系. 本章将介绍这样的语言，它就是集合.

集合及其相关理论是德国数学家康托尔在 19 世纪七八十年代创立的. 创立集合论的初衷并不在于为数学提供一种语言，它的目的是为了解决当时数学面临的重大问题，如“什么是无限”. 随着数学的发展，人们逐渐认识到集合是数学中最基本的概念，集合的语言是现代数学的基本语言，集合论为现代数学奠定了基础.

你想进入现代数学的殿堂吗？请从了解集合开始.

1.1 集合的概念与表示

在日常生活中，我们常常需要把一些事物放在一起考虑，并且给它们一个总称. 比如，地球上四片海洋(太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋)总称为四大洋.

在数学中，有时也要把一组对象作为一个整体考虑，例如，不等式 $2x+3>0$ 的所有解.

一般地，某些指定对象的全体构成一个**集合**(set)，简称**集**，集合中的每个对象叫作集合的**元素**(element).

集合通常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示. 例如，不等式 $2x+3>0$ 的所有解构成一个集合，称为不等式 $2x+3>0$ 的解集，可以记作 A.

集合中的元素必须是确定的. 这就是说，对于给定的一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.

集合的元素又是互异的. 这就是说，集合中的元素是不重复出现的. 任何两个相同的对象在同一个集合中时，只能算作这个集合的一个元素.

数学里经常用到的集合是各种数的集合. 数组成的集合，简称**数集**. 下面是一些常用的数集及其记号：

全体非负整数组成的集合叫作**自然数集**，也叫**非负整数集**，记作 $\mathbf{N}$；

全体正整数组成的集合叫作**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合叫作**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合叫作**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合叫作**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

上述集合都含有无限多个元素，我们将含有无限多个元素的集合称为**无限集**(infinite set)，将只含有有限个元素的集合称为**有限集**(finite set). 如一元二次方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集就是一个有限集.

集合中的元素通常用小写拉丁字母 a，b，c，…表示. 如果 a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$，读作“a **属于**集合 A”；如果 a 不是集合 A 的元素，记作$a\notin A$，读作“a **不属于**集合 A”.

例如，$0\in\mathbf{Q}$，$\frac{3}{2}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$.

我们可以用自然语言描述一个集合，除此之外，还可以用什么方法表示集合呢?

对于某些集合，我们可以将所有的元素一一列举出来，放在

一个大括号内，这种表示集合的方法叫作**列举法**. 用列举法表示集合时，元素之间用逗号隔开，但列举时与元素的次序无关.

例如，由不超过 20 的质数组成的集合可以表示为 $B=\{2，3，5，7，11，13，17，19\}$. 对于有些无限集，也可以用列举法表示，如 $\mathbf{N}^*=\{1，2，3，4，\cdots\}$.

有些集合不能用列举法表示，如不等式 $2x+3>0$ 的解集用列举法无法表示. 为此，我们还需寻求集合的其他表示方法.

考虑上述集合 B 中的元素，2，3，5，7，11，13，17，19 有一个共同的特征，它们均是不超过 20 的质数，并且除这些数之外再没有不超过 20 的质数，因此，我们也可以用$\{x|x$ 是不超过 20 的质数$\}$表示这个集合，这种表示集合的方法叫作**描述法**.

描述法的关键是从集合的所有元素中抽象出一个确定的条件，使得符合这个条件的对象属于这个集合，不符合这个条件的对象则不属于这个集合. 因此，描述法一般可以表示为如下形式：

$$\{x|x \text{ 满足条件 } P\},$$

其中 P 是集合中所有元素(也只有这些元素)所具备的公共属性，它是确定这个集合的条件.

例如，不等式 $2x+3>0$ 的解集中所有元素的公共属性是 $x\in\mathbf{R}$，且 $2x+3>0$，即 $x>-\dfrac{3}{2}$，所以，我们可以把这个集合表示为

$$A=\left\{x\in\mathbf{R}\middle|x>-\frac{3}{2}\right\}$$

或 $$A=\left\{x\middle|x>-\frac{3}{2}，x\in\mathbf{R}\right\}.$$

又如，任何一个偶数都可以表示为 $x=2k(k\in\mathbf{Z})$的形式. 所以，我们可以把所有偶数的集合表示为

$$B=\{x\in\mathbf{Z}|x=2k，k\in\mathbf{Z}\}.$$

有时候，如果从上下文的关系来看，$x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$ 等是明确的，那么 $x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$ 等可以省略，只写其元素 x. 例如，上面的集合 A 也可以表示为 $A=\left\{x\middle|x>-\dfrac{3}{2}\right\}$，集合 B 也可以表示为 $B=\{x|x=2k，k\in\mathbf{Z}\}$.

例 1 用适当的方法表示下列集合：

(1) 大于 5 小于 12 的整数组成的集合；

（2）直角坐标平面内第一象限和第三象限的点组成的集合；

（3）方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合.

解　（1）大于 5 小于 12 的整数组成的集合用列举法可以表示为

$$\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

（2）直角坐标平面内的点可用有序数对来表示. 因为点在第一象限或第三象限内的条件是其横坐标与纵坐标的符号相同，所以这个集合可以表示为

$$\{(x, y) \mid xy>0\}.$$

（3）方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合，可以表示为

$$\{x \mid x^2+1=0, x\in \mathbf{R}\}.$$

容易知道，集合 $\{x \mid x^2+1=0, x\in \mathbf{R}\}$ 中不含任何元素. 我们把不含任何元素的集合称为**空集**(empty set)，记作 $\varnothing$. 方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合就是 $\varnothing$.

例2　将集合 $A=\{x \mid 0<2x+3<1\}$ 在数轴上表示出来.

解　集合 A 是不等式 $0<2x+3<1$ 的解集，也即是不等式组

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3<1 \end{cases}$$

的解集.

解这个不等式组得 $-\dfrac{3}{2}<x<-1$，所以，集合

$$A=\left\{x \,\middle|\, -\frac{3}{2}<x<-1\right\}.$$

集合 A 在数轴上的表示如图 1-1 所示.

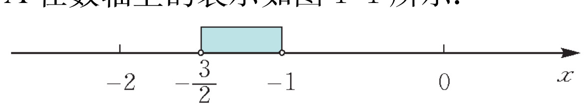


图 1-1

设 a，$b\in \mathbf{R}$，且 $a<b$，有时，我们把集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 记作 (a, b)，称为**开区间**；把集合 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 记作 $[a, b)$，称为**左闭右开的区间**；把集合 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a, b]$，称为**左开右闭的区间**；把集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 记作 $[a, b]$，称为**闭区间**. 这里实数 a，b 分别称作相应区间的左、右端点. 例如，

例 2 中的集合 $A=\left\{x \mid -\frac{3}{2}<x<-1\right\}$ 可以简记为 $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$.

另外，我们将集合 $\{x \mid x<a\}$ 记作 $(-\infty, a)$，将集合 $\{x \mid x \leqslant a\}$ 记作 $(-\infty, a]$，将集合 $\{x \mid x>a\}$ 记作 $(a, +\infty)$，将集合 $\{x \mid x \geqslant a\}$ 记作 $[a, +\infty)$，其中的 $+\infty$，$-\infty$ 分别读作"正无穷大""负无穷大".

实数集 **R** 可记作 $(-\infty, +\infty)$.

练习

1. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

0 ____ $\mathbf{N}$，0 ____ $\mathbf{N}^*$，0.5 ____ $\mathbf{N}$，-3 ____ $\mathbf{N}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{R}$，

4 ____ $\{x \mid x-3>2\}$.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x^2-1=0\}$；

(2) $\{x \mid x$ 为不大于 10 的正奇数$\}$；

(3) $\{(x, y) \mid x+2y=6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

3. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 不等式 $-1<2x-1<1$ 的解集；

(2) 由 4 与 6 的所有公倍数组成的集合；

(3) 二次函数 $y=x^2+1$ 的图象上所有点组成的集合.

习题 1.1

1. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 若 $A=\{x \mid x$ 是 210 的因数$\}$，则 11 ____ A；

(2) 若 $B=\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant x<8\}$，则 7 ____ B；

(3) 若 $C=\{x \mid x^2+x-2=0\}$，则 -2 ____ C；

(4) 若 $D=\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}$，且 $y=x^2\}$，则 $(2, 4)$ ____ D.

2. 把下列集合用另一种方法表示出来：

(1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$；

(2) $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x|<3\}$；

(3) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N}$，且 $x+y<2\}$；

(4) $\{x \mid x^2+x-2=0\}$.

3. 用适当的方法表示下列集合：

(1) "mathematics" 中的字母组成的集合；

(2) 所有横坐标与纵坐标的乘积等于 6 的点组成的集合；

(3) 由 1，2，3 这三个数字组成的没有重复数字的三位数构成的集合.

4. 将不等式 $-3 \leqslant x-1 \leqslant 3$ 的解集分别用集合和区间表示出来.

1.2 集合的基本关系

观察下列各组集合：

(1) $A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{R}$；

(2) $A=\{x\mid x^2-1<0，x\in\mathbf{R}\}$，$B=[-1,1]$；

(3) $A=\{x\mid x^2-4=0，x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{-2,2\}$.

容易知道，三组集合中，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，为了描述集合 A 与集合 B 的这种关系，我们引入子集的概念.

对于两个集合 A，B，如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素，我们就说**集合 A 包含于集合 B**，或**集合 B 包含集合 A**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 这时我们称集合 A 是集合 B 的**子集**(subset).

当集合 A 不包含于集合 B 时，记为 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

特别规定：**空集$\varnothing$是任何集合的子集.**

对于两个集合 A，B，如果 A 是 B 的子集，B 也是 A 的子集，就说 A 与 B **相等**，记为 $A=B$. 显然，如果 $A=B$，则 A，B 的元素完全相同. 对于上面的第(3)组集合，就有$A=B$.

根据定义，任何一个集合是它本身的子集. 当集合 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$ 时，我们称 A 为 B 的**真子集**(proper subset)，记为

$$A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A,$$

读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”，如：$\{1，2\}\subsetneqq\{1，2，3\}$.

> $A\subsetneqq B$ 的含义是：对于任意 $x\in A$，均有 $x\in B$，但存在 $x_0\in B$，$x_0\notin A$.

显然，空集是任何非空集合的真子集.

为了能直观地分析问题，我们常常用图形表示集合. 在平面上画一条封闭曲线，用它的内部表示一个集合.

如图 1-2 表示集合 A，如图 1-3 表示集合 C 是集合 B 的子集. 这种表示集合的图形通常称为 Venn 图.

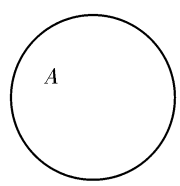


图 1-2

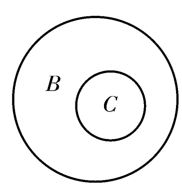


图 1-3

例 1 写出集合$\{a，b\}$的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集.

解 集合$\{a，b\}$的所有子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a，b\}$.

其中，$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$是它的真子集.

例2 设 A，B，C 是集合.

（1）若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，求证：$A\subseteq C$；

（2）若 $A\subseteq B$，$B\subsetneqq C$，求证：$A\subsetneqq C$.

证明 （1）对于任意 $x\in A$，因为 $A\subseteq B$，所以$x\in B$；又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$.

即对于任意 $x\in A$，有$x\in C$，所以 $A\subseteq C$.

（2）同(1)可证，$A\subseteq C$. 又因为 $B\subsetneqq C$，所以存在$x_0\in C$，使得 $x_0\notin B$. 又因为 $A\subseteq B$，所以 $x_0\notin A$.

由$A\subseteq C$，$x_0\in C$，$x_0\notin A$，得$A\subsetneqq C$.

若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$. 这一性质称为集合包含关系的传递性.

练习

1. 用适当的符号($\in$，$\notin$，$=$，$\supsetneqq$，$\subsetneqq$)填空：

（1）a ________ $\{a\}$；　　（2）$\varnothing$ ________ $\{a\}$；

（3）$\{a\}$ ________ $\{a, b, c\}$；

（4）$\{x\mid x$ 是偶数$\}$ ________ $\{x\mid x=2k, k\in \mathbf{Z}\}$；

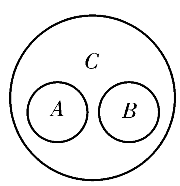
（5）$\{1, 2, 3, 5, 7\}$ ________ $\{x\mid x$ 是不大于 10 的质数$\}$；

（6）$\{x\mid 3x+2<4x-1\}$ ________ $\{x\mid x>2\}$.

2. 设 $U=\{a, b, c\}$，试写出 U 的所有子集，并指出哪些是它的真子集.

习题 1.2

1. 图中 A，B，C 表示集合，试用$\subseteq$或$\not\subseteq$表示它们之间的关系.



（第 1 题图）

2. 对于下列各题，关系式 $A\subseteq B$，$A\supseteq B$，$A\subsetneqq B$，$A\supsetneqq B$，$A=B$ 中哪些成立？

（1）$A=\{x\mid x$ 是矩形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是正方形$\}$；

（2）$A=\{x\mid x$ 是 12 的质因数$\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$.

3. 判断下列关系是否成立：

（1）$\{a, b\}=\{b, a\}$；（　）　　（2）$\{a, b\}\subseteq\{b, a\}$；（　）

（3）$a\subseteq\{a, b\}$；（　）　　（4）$\{0\}=\varnothing$；（　）

（5）$\varnothing\subseteq\{0\}$；（　）　　（6）$0\in\{0\}$；（　）

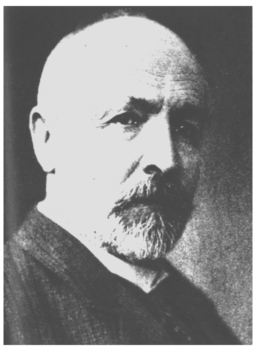
（7）$\varnothing\subseteq U$(U 是一个集合)；（　）　　（8）$\{1, 2\}\subsetneqq\{2, 3, 4\}$.（　）

4. 满足条件$\{2\}\subseteq M\subsetneqq\{1, 2, 3\}$的集合 M 有多少个？

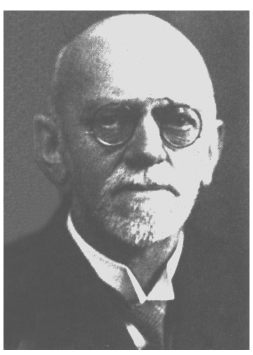
5. 设 $A=\{x\mid x=2m+1, m\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4m+1, m\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=8m+1, m\in \mathbf{Z}\}$，试判断 A，B，C 之间的关系.

阅读与讨论

希尔伯特旅馆——无限集



康托尔(G. Cantor，1845—1918)



希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)

银河系中数不清的星辰、浩瀚无垠的太空、永恒的时间……几千年来吸引无数青少年去幻想与探索．多少诗人为它写出了难忘的诗篇，又有多少哲学家倾最深刻智慧于它，它就是“无限”．到了19世纪末，“什么是无限”成为数学发展必须解决的问题．在探索这一问题的过程中，德国数学家康托尔创立了集合论，开辟了进入现代数学的道路．

怎样理解无限集合？20世纪前半期世界数学的领袖人物、德国数学家希尔伯特“创作”了一个有趣的故事，可以帮助我们理解它．希尔伯特的故事如下：

有一家旅馆，客人已经住满了所有的房间，但是深夜又来了一位客人，怎么办呢？旅馆主人想了一个办法，居然把这位新客人安排好了，而且仍然是1人一间房，既没有2人挤到一间房，也没有1人住了几间房，房间也没有空着的．这样相安无事了几天．有一天晚上，在没有其他新客人来住的前提下，这位新客人突然又没有房间了，这是怎么一回事？

原来旅馆主人出了这样一个主意：让1号房的客人搬到2号房去，2号房的客人搬到3号房去……这样每位原来的客人都被搬到下一间房去了．于是1号房就空出来了，让给了新来的客人．可过了几天，这些老客人忘记了这件事，又都搬回到自己住过的房间：2号房的客人搬回了1号房，3号房的客人搬回了2号房……这样，那位新来的客人就没有房间了．

同学们当然会看出希尔伯特的故事的问题在哪里．第一次搬房间的时候，最后一间房的客人搬到哪里去了呢？第二次大家往回搬的时候，最后一间房的房客，搬到前一间房去了，那么最后一间房岂不是空出来了？那位新来的客人怎么会没有房间呢？

原来希尔伯特旅馆的房间的数目是无限的，所以没有“最后一间房”．因此，上面的推理是完全正确的，只不过它有一个前提你必须承认：可以造一家房间数目为无限的旅馆．这看

起来有些“荒唐”，但康托尔正是从类似的思考出发，凭借超凡的智慧，看出了无限与有限是如此不同，创立了极为深刻的集合论，特别是关于无限集合的理论．当时的数学界有人拥护他，有人反对他，由此引起了一场论战．

我们现在用集合语言来分析这个故事．假设旅馆的房间是一个集合 A，它的元素是各个房间．如果我们用正整数 k 来表示第 k 号房，则

$$A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ \cdots\},$$

现在它们都住满了客人，在深夜来客时，每一位客人都搬到下一间房去了．于是住了客人的房间组成了一个新的集合 B，即

$$B=\{2,\ 3,\ \cdots,\ k+1,\ \cdots\}.$$

现在 1 号房空出来了，可以给深夜的来客住．很明显 B 是 A 的一个子集，而且 A 中至少有一个元素(现在的 1 号房)不在 B 中，所以 B 是 A 的真子集．

对上面客人搬家的情况，我们画成

$$\begin{array}{l} A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k,\ \cdots\}, \\ \qquad\ \ \searrow\ \ \searrow\qquad\quad\ \searrow \\ B=\{\quad\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k,\ k+1,\ \cdots\}. \end{array}$$

我们说这是由 A 到 B 的一个对应．上文中说“既没有 2 人挤到一间房，也没有 1 人住了几间房”，这句话很重要，表示集合 A 中每一个元素与集合 B 中的唯一一个元素对应，记作

$$A\to B.$$

后来，老客人们搬回来了，这就又有了一个新对应，记作

$$B\to A,$$

仍然是集合 B 中一个元素对应集合 A 中唯一一个元素．

同时有这两个对应存在，我们就说集合 A 与集合 B 建立了一一对应．

所以希尔伯特旅馆的房间所组成的集合 A 有一个奇特的性质：

集合 A 与它自己的一个真子集 B 一一对应． (*)

所有的无限集都有这样的性质．你能想象有限集合有这种性质吗？

我们可以把(*)这句话作为无限集的定义．希尔伯特旅馆的房间组成的集合就是一个无限集．

同学们可能会吃惊，集合论难道就是这种不合情理的“分析”吗？可是历史证明了，由此开始的集合论确实是现代数学的基础．

讨论题

1. 如果希尔伯特旅馆住满客人后，又来了 10 位客人，你能重新安排房间，使每人住 1 间房且没有空的客房吗？

2. 如果希尔伯特旅馆住满客人后，住奇数号房间的旅客全部退房，你能将留下的客人重新安排房间，使每人住 1 间房且没有空的客房吗？

1.3 集合的基本运算

请注意体会“或”“且”等词的含义，并注意“或”在数学与日常表达中的差别.

设

$A_1=\{x|x$ 是能被 2 整除的整数$\}$，

$A_2=\{x|x$ 是能被 3 整除的整数$\}$，

$A_3=\{x|x$ 是能被 2 整除且能被 3 整除的整数$\}$，

$A_4=\{x|x$ 是能被 2 整除或能被 3 整除的整数$\}$，

$A_5=\{x|x$ 是不能被 2 整除的整数$\}$.

我们的问题是：能否用 A_1，A_2 表示 A_3？能否用 A_1，A_2 表示 A_4？能否用 $\mathbf{Z}$，A_1 表示 A_5？

要解决上述问题，我们需要引入集合的运算.

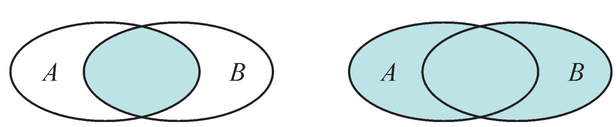
一般地，设 A，B 是两个集合，我们将所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合，叫作集合 A 与集合 B 的**交集**(intersection)，记作 $A\cap B$(读作“A 交 B”)，即

$$A\cap B=\{x|x\in A，且\ x\in B\}.$$

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫作集合 A 与集合 B 的**并集**(union)，记作 $A\cup B$(读作“A 并 B”)，即

$$A\cup B=\{x|x\in A，或\ x\in B\}.$$

当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，常用图 1-4 中的阴影部分分别表示 $A\cap B$，$A\cup B$.



$A\cap B$　　　$A\cup B$

图 1-4

有了交集与并集的概念，我们可以回答本节开头提出的前两个问题．显然，$A_3=A_1\cap A_2$，$A_4=A_1\cup A_2$．

例1 设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, d, e, f\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$．

解 $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$，

$A\cap B=\{b, d\}$．

例2 设 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$．

解 将集合 A 和集合 B 在数轴上表示出来（如图 1-5），根据交集和并集的定义可得

$$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 2\},$$
$$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}.$$

图 1-5

例3 已知 A 为某班今天穿红衬衫的同学组成的集合，B 为该班女生组成的集合，试问：$A\cap B$，$A\cup B$ 分别表示由哪些同学组成的集合？

解 $A\cap B$ 表示该班今天穿红衬衫的女生组成的集合．$A\cup B$ 表示该班今天穿红衬衫的男生或该班女生组成的集合．

由交集和并集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，有

$$A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap B=B\cap A,$$
$$A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cup B=B\cup A.$$

练习

1. 设 $A=\{x\mid x$ 是正三角形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是锐角三角形$\}$，求：
   (1) $A\cap B$；　　(2) $A\cup B$．
2. 设 $A=\{(x, y)\mid y=-4x+6\}$，$B=\{(x, y)\mid y=5x-3\}$．
   (1) 求 $A\cap B$；　　(2) 判断 $(0, 5)$，$(1, 2)$，$(2, 1)$ 是否属于 $A\cup B$．
3. 甲、乙两班共订了 13 种报刊，其中甲班订了 10 种报刊，乙班也订了 10 种报刊．试问：甲、乙两班订了多少种同样的报刊？

为了回答本节开头提出的最后一个问题，我们引入补集的概念.

设 S 是一个集合，A 是 S 的子集，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作 S 中 A 的**补集**(complementary set)，记作 $\complement_S A$，即

$$\complement_S A=\{x\mid x\in S,且\ x\notin A\}.$$

我们常用图 1-6 中的阴影部分表示 $\complement_S A$.

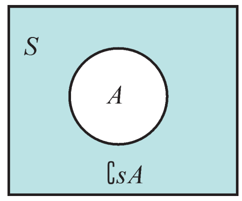


图 1-6

利用补集的概念可知 $A_5=\complement_{\mathbf{Z}} A_1$.

一般地，当我们研究的问题只限于集合 S 中的元素时，我们可将 S 看作一个**全集**(universe)，全集通常用 U 表示.

例如，当我们在实数范围内考虑问题时，可将 $\mathbf{R}$ 看作全集；当我们在整数范围内考虑问题时，可将 $\mathbf{Z}$ 看作全集.

例4 设 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,4,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap\complement_U B$.

解 $\complement_U B=\{1,5,6\}$，

$A\cap\complement_U B=\{1,5\}$.

例5 设 $U=\mathbf{R}$，不等式组 $\begin{cases}3x-10<0,\\2x+1\geqslant 0\end{cases}$ 的解集为 A，求 $\complement_U A$.

解 $A=\{x\mid 3x-10<0,且\ 2x+1\geqslant 0\}=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{10}{3}\right\}$，

$\complement_U A=\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{1}{2},或\ x\geqslant\frac{10}{3}\right\}$.

现在请同学们思考下列问题：

(1) $A\cup\complement_U A=$________；

(2) $A\cap\complement_U A=$________；

(3) $\complement_U U=$________；

(4) $\complement_U(\complement_U A)=$________.

例6 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x^2+3x+2=0\}$，$B=\{x \mid (m+1)x=m\}$，若 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，求实数 m 的值.

解 因为 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，所以集合 $\complement_U A$ 与 B 没有公共元素，所以 $B\subseteq A$.

又因为 $A=\{x \mid x^2+3x+2=0\}=\{-1,-2\}$，所以，

(1) 当 $m=-1$ 时，$B=\varnothing$，符合要求；

(2) 当 $m\neq-1$ 时，$B=\left\{\dfrac{m}{m+1}\right\}$，所以

$$\frac{m}{m+1}=-1 \text{ 或 } \frac{m}{m+1}=-2,$$

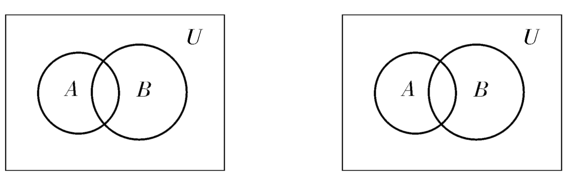
解得

$$m=-\frac{1}{2} \text{ 或 } m=-\frac{2}{3}.$$

综合可知：符合要求的实数 m 有三个，分别为 -1，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{2}{3}$.

练习

1. 设 $U=\{x \mid x$ 是三角形$\}$，$A=\{x \mid x$ 是直角三角形$\}$，求 $\complement_U A$.
2. 设 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A=\{3, 4, 5\}$，$B=\{4, 7, 8\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.
3. 图中 U 是全集，A，B 是 U 的两个子集，在图中分别用阴影表示：
(1) $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；　　(2) $\complement_U(A\cap B)$.



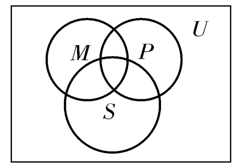
(1)　　(2)

（第3题图）

习题 1.3

1. 已知 A 为所有奇数构成的集合，B 为所有偶数构成的集合，$\mathbf{Z}$ 为整数集，求 $A\cap B$，$A\cap\mathbf{Z}$，$B\cap\mathbf{Z}$，$A\cup B$，$A\cup\mathbf{Z}$，$B\cup\mathbf{Z}$.
2. 设 $A=\{x \mid x\leqslant 3\}$，$B=\{x \mid x<1\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，并在数轴上表示出来.

3. 如图，M，S，P 都是全集 U 的子集，试用阴影部分表示集合$(M\cap P)\cap \complement_U S$.



（第 3 题图）

4. 设 $U=\{x|0<x\leqslant 10，x\in \mathbf{N}\}$，$A=\{1，2，4，5，9\}$，$B=\{4，6，7，8，9\}$，$C=\{3，5，7\}$. 求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$(A\cap B)\cap C$，$(A\cup B)\cup C$.
5. 设 $U=\{a，b，c，d，e，f\}$，$A=\{a，c，d\}$，$B=\{b，d，e\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U(A\cup B)$，并指出其中相等的集合.

复习题

A 组

1. 如果 $X=\{x|x>-1\}$，那么（　　）.

(A) $0\subseteq X$　　(B) $\{0\}\in X$

(C) $\varnothing\in X$　　(D) $\{0\}\subseteq X$

2. 用列举法写出与下列集合相等的集合：

(1) $A=\{x|x^2=9\}$；

(2) $B=\{x\in \mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 2\}$；

(3) $C=\{x|x=1，或 x=2\}$；

(4) $D=\left\{n\,\middle|\,\dfrac{n}{5}\in \mathbf{N}，|n|\leqslant 20\right\}$.

3. 写出具备下列特性的对象所组成的集合：

(1) 非负偶数；

(2) 能被 3 整除的数；

(3) 直角坐标平面内第二象限或第四象限的点；

(4) 直线 $y=kx+b$ 上的点.

4. 分别用描述法和列举法表示方程组$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\x=y\end{cases}$的解集.
5. 若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且满足 $A\cap B=\{2\}$，求实数 a 的值.
6. 已知 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,6,9\}$，$C=\{3,7,8\}$，求$(A\cap B)\cup C$.
7. 已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$\complement_U A=\{2,4,6,8\}$，$\complement_U B=\{1,3,4,7,9\}$，求集合 B.

B 组

1. (1) 下列可以用来描述一个集合的条件是（　　）.

(A) 一切很大的数　　(B) 与 π 相差很小的数

(C) 大于 -2 的数　　(D) 一年级个子高的学生

(2) 若 $A=\{1, 2, 3\}$，且 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，那么这样的集合 B 有(　　).

(A) 4 个　　　　(B) 8 个

(C) 10 个　　　　(D) 16 个

(3) 设集合 $A=\{(x, y)\mid x>0, y>0\}$，$B=\{(x, y)\mid xy>0\}$，$C=\{(x, y)\mid x+y>0\}$，则(　　).

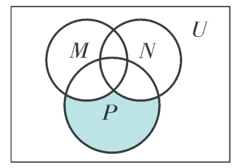
(A) $A\subseteq B\subseteq C$　　　　(B) $A\subseteq C\subseteq B$

(C) $A\subseteq B$，$A\not\subseteq C$　　　　(D) $A\subsetneqq B$，$A\subseteq C$

2. (1) 集合 $A=\{0\}$，$B=\{x\mid x^2+1=0\}$，则 A 与 B 的关系是 A ______ B；

(2) 集合 $M=\{m\in \mathbf{N}\mid 6-m\in \mathbf{N}\}$，用列举法表示 $M=$____________；

(3) 如图，U 是全集，M，N，P 是 U 中的三个子集，则图中阴影部分表示的集合是__________.



(第 2(3)题图)

3. 已知 S 为平面上所有点组成的集合，$A\in S$，$B\in S$，说明下列集合中的点组成什么图形：

(1) $\{P\in S\mid PA=PB\}$；

(2) $\{P\in S\mid PA=3\}$.

4. 非空集合 M 满足两个条件：①$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；②若 $a\in M$，则 $6-a\in M$. 这样的集合 M 有多少个？

5. 设全集 $U=\{x\mid -3\leqslant x<6, x\in \mathbf{Z}\}$，$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3, x\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{0,4,5\}$，求：

(1) $\complement_U B$；　　(2) $(\complement_U A)\cup B$；　　(3) $\complement_U(A\cup B)$.

6. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,8\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{2,6\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4, 7\}$，求集合 A.

7. 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+2=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值.

思考与实践

1. 某中学高一(1)班有学生 54 人，其中乒乓球爱好者 41 人，篮球爱好者 29 人. 试用集合的方法说明，既爱好乒乓球又爱好篮球的学生最多有多少人？最少有多少人？

2. 学校管理学生的方式是将学生分成若干个年级，每个年级分成若干个班，你能用集合的思想描述这种管理方式吗？日常生活中还有哪些方面有这种思想的应用？试用这种思想去认识一个国家的社会化管理.

第2章 常用逻辑用语

2.1　充分条件与必要条件

2.2　全称量词与存在量词

复习题

思考与实践

在初中，我们知道了什么叫命题. 比如：

如果两个三角形的三边对应相等，那么这两个三角形全等.

如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等.

前者是三角形全等的判定定理，后者是一个错误的判断，但它们都是命题.

为了把命题中题设和结论的关系表达清楚，我们需要引进专门的词语；为了理解一些较为复杂的命题，我们还需要对一些在逻辑推理中常用的词语（如“或”“且”“任意一个”“存在一个”等）给出明确的含义.

这些需要引进并给出明确含义的词语，都属于常用逻辑用语.

在本章中，我们将学习一些常用逻辑用语. 正确地使用这些常用逻辑用语，不仅能更清晰地反映数学内容的逻辑关系，而且能帮助我们更准确地理解和表达数学内容.

2.1 充分条件与必要条件

我们知道，判断一件事情的语句叫作**命题**(proposition).

命题由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.

如果题设成立，那么结论一定成立，这样的命题叫作真命题.如果题设成立时，不能保证结论一定成立，这样的命题叫作假命题.

要判断一个命题是真命题，必须通过推理证明；要判断一个命题是假命题，只需举一个例子(反例)，它符合命题的题设，但不满足结论就可以了.

数学中的命题通常可以写成“如果 p，那么 q”的形式，这时“p”是题设，“q”是结论.

“如果 p，那么 q”形式的命题，其中有的是真命题，例如下面的命题：

如果 $x>0$，那么 $x^2>0$. ①

命题“如果 p，那么 q”为真命题，是指当 p 成立时 q 也成立，也就是说，由 p 经过推理可以得出 q，记作 $p\Rightarrow q$，读作“p 推出 q”. 否则，记作 $p\not\Rightarrow q$，读作“p 不能推出 q”.

命题①是一个真命题，可以写成

$x>0\Rightarrow x^2>0$.

再看下面的命题：

如果 $x^2>0$，那么 $x>0$. ②

它是一个假命题，可以写成

$x^2>0\not\Rightarrow x>0$.

$p\Rightarrow q$ 可以理解为：只要有条件 p 成立，就一定有结论 q 成立，即 p 对于 q 是充分的. 也就是说，为了得到结论 q，具备条件 p 就足够了.

一般地，如果 $p\Rightarrow q$，我们说，p 是 q 的**充分条件**(sufficient condition)，q 是 p 的**必要条件**(necessary condition).

当 $p\not\Rightarrow q$ 时，我们也说，p 是 q 的不充分条件，q 是 p 的不必要条件.

在前面的命题①中，“$x>0$”是“$x^2>0$”的充分条件，“$x^2>0$”是“$x>0$”的必要条件；在前面的命题②中，“$x^2>0$”是“$x>0$”的不充分条件，“$x>0$”是“$x^2>0$”的不必要条件.

在初中，我们学过如下两个定理：

对角线互相平分的四边形是平行四边形. ③

平行四边形的对角线互相平分. ④

这两个定理分别是平行四边形的判定定理和性质定理，它们都是真命题.

设

p:四边形的对角线互相平分；

q:四边形是平行四边形.

容易知道：在判定定理③中，p 是 q 的充分条件；在性质定理④中，p 是 q 的必要条件. 这时，我们说："四边形的对角线互相平分"是"四边形是平行四边形"的充分必要条件.

一般地，如果既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记作

$$p \Leftrightarrow q.$$

这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，我们就说 p 是 q 的**充分必要条件**(sufficient and necessary condition)，简称**充要条件.**

前面我们知道，"$x>0$"是"$x^2>0$"的充分条件，"$x>0$"不是"$x^2>0$"的必要条件，这时，我们就说"$x>0$"是"$x^2>0$"的充分而不必要条件.

一般地，如果有 $p \Rightarrow q$，但 $q \nRightarrow p$，我们就称 p 是 q 的**充分而不必要条件.**

同样地，如果有 $p \nRightarrow q$，但 $q \Rightarrow p$，我们就称 p 是 q 的**必要而不充分条件.** 例如"$x^2>0$"是"$x>0$"的必要而不充分条件.

如果有 $p \nRightarrow q$，且 $q \nRightarrow p$，我们就称 p 是 q 的**既不充分也不必要条件.** 例如"x 是质数"是"x 是奇数"的既不充分也不必要条件.

例1 指出下列各题中 p 是 q 的什么条件(在"充分而不必要条件""必要而不充分条件""充要条件""既不充分也不必要条件"中选择).

(1) p:$|x|<3$，q:$x<3$；

(2) p:$x^2>4$，q:$x<-2$；

(3) p:$ac>bc$，q:$a>b$；

(4) p:两直线平行，q:同位角相等.

解 (1) $|x|<3 \Rightarrow x<3$，$x<3 \nRightarrow |x|<3$，所以，p 是 q 的充分而不必要条件.

(2) $x^2>4 \nRightarrow x<-2$，$x<-2 \Rightarrow x^2>4$，所以，p 是 q 的必要而不充分条件.

(3) $ac>bc \nRightarrow a>b$，$a>b \nRightarrow ac>bc$，所以，p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(4) 两直线平行$\Rightarrow$同位角相等，同位角相等$\Rightarrow$两直线平行，所以，p 是 q 的充要条件.

练习

1. 从“$\Rightarrow$”“$\nRightarrow$”“$\Leftrightarrow$”中选出适当的符号填空：

(1) $a^2>b^2$ ________ $a>b$；

(2) $a^2+2ab+b^2=0$ ________ $a+b=0$；

(3) $A\cap B=A$ ________ $A\cup B=B$；

(4) 两个角相等________两个角是对顶角；

(5) 在$\triangle ABC$中，$AB^2+AC^2=BC^2$ ________$\triangle ABC$是直角三角形；

(6) 三角形的三条边相等________三角形的三个角相等.

2. 从“充分而不必要条件”“必要而不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”中选出适当的一种填空：

(1)“a是4的倍数”是“a是偶数”的________________；

(2)“$x-2=0$”是“$(x-2)(x-3)=0$”的________________；

(3)“$x>-2$”是“$|x|>2$”的________________；

(4)“两个角相等”是“两个角为同一角的补角”的________________；

(5)“两条直线互相垂直”是“两条直线相交所成的四个角都是直角”的__________；

(6)“两个三角形的对应角相等”是“两个三角形全等”的________________.

习题 2.1

1. 举例说明：

(1) p是q的充分而不必要条件；

(2) p是q的必要而不充分条件；

(3) p是q的充要条件；

(4) p是q的既不充分也不必要条件.

2. 从“充分而不必要条件”“必要而不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”中选出适当的一种填空：

(1)“$a\in\mathbf{N}$”是“$a\in\mathbf{Z}$”的______________；

(2)“$x<5$”是“$x<3$”的______________；

(3)“$(x-2)(x-3)=0$”是“$x-2=0$”的______________；

(4)“四边形的对角互补”是“四边形的四个顶点共圆”的______________；

(5)“x是6的倍数”是“x是2的倍数”的______________.

3. 判断下列命题的真假：

(1)“$A\subseteq B$”是“$\complement_U B\subseteq\complement_U A$”的充分条件；

(2)“$A\subseteq B$”是“$\complement_U B\subseteq\complement_U A$”的必要条件；

(3)“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的充分条件；

(4)“$a>b$”是“$a+c>b+c$”的充要条件.

2.2 全称量词与存在量词

在数学与日常生活中，我们经常会遇到这样一些命题：

所有三角形的内角和都是 $180°$. ①

每一个有理数都是实数. ②

对任意的实数 x，都有 $x^2+x+1>0$. ③

对一切实数 x，都有 $x^2-1>0$. ④

非空集合 A 中的任何元素都是集合 $A\cup B$ 的元素. ⑤

在以上命题的条件中，"所有""每一个""任意""一切""任何"等都是表示整体或全部的含义，这样的词叫作**全称量词**. 在数学中，全称量词用符号"$\forall$"表示.

例如，上述命题③可以写成：

$$\forall x\in\mathbf{R},\ x^2+x+1>0.$$

读作"对任意的 x 属于 $\mathbf{R}$，有 $x^2+x+1>0$ 成立".

含有全称量词的命题叫作**全称量词命题**. 全称量词命题的一般形式是

$$\forall x\in I,\ p(x).$$

上述命题①～⑤都可以写成这样的形式.

全称量词命题的真假与集合 I 有关. 当且仅当对于集合 I 中的每一个 x，命题 $p(x)$ 都是真命题时，"$\forall x\in I$，$p(x)$"这一命题才是真命题. 依此，可以判断，命题①，②，③，⑤是真命题，命题④是假命题.

例1 试判断下列命题的真假：

（1）$\forall x\in\mathbf{R}$，$(x-2)^2\geqslant 0$；

（2）$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1>0$.

解 （1）此命题是真命题.

（2）此命题是假命题，因为当 $x=-1$ 时，$x^2+2x+1>0$ 不成立.

我们再看下面这些命题：

有一个实数 x，满足 $x+1=0$. ⑥

存在实数 x_0，使得 $x_0^2+1=0$. ⑦

有些三角形的三个内角都是锐角. ⑧

在以上命题的条件中，“有一个”“存在”“有些”等都是表示部分的含义，这样的词叫作**存在量词**. 在数学中，存在量词用符号“∃”表示.

例如，命题“有一个 $x_0 \in \mathbf{R}$，满足 $x_0+1=0$”可以写成：

$$\exists x_0 \in \mathbf{R},\ x_0+1=0.$$

读作“存在一个 x_0 属于 $\mathbf{R}$，使 $x_0+1=0$ 成立”.

含有存在量词的命题叫作**存在量词命题**. 存在量词命题的一般形式是

$$\exists x_0 \in I,\ p(x_0).$$

上述命题⑥，⑦，⑧都可以写成这样的形式.

存在量词命题的真假与集合 I 有关. 只要在给定的集合 I 中能找到一个 x_0，使得 $p(x_0)$ 是真命题，“$\exists x_0 \in I,\ p(x_0)$”这一命题才是真命题. 依此，可以判断，命题⑥，⑧是真命题，命题⑦是假命题.

例2 试判断下列存在量词命题的真假：

（1）$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0^2+2x_0+1=0$；

（2）$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0^2+2x_0+2=0$；

（3）$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$(x_0-2)(x_0-3)<0$.

解 （1）存在 $x_0=-1$，使 $x_0^2+2x_0+1=(-1)^2+2\times(-1)+1=0$ 成立，所以，此命题是真命题.

（2）因为 $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1$，显然，不存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使 $x_0^2+2x_0+2=0$ 成立，所以，此命题是假命题.

（3）当 $2<x_0<3$ 时，$(x_0-2)(x_0-3)<0$，所以，此命题是真命题.

练习

1. 判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题：
   （1）任何实数的平方都是非负数；
   （2）质数都是奇数；
   （3）有些四边形既是矩形也是菱形；
   （4）对于某些自然数 x，代数式 x^2-4x+3 的值是负数.
2. 试判断下列命题的真假：
   （1）$\forall x \in \mathbf{N}$，$(x+1)^3\geqslant 0$；　（2）$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+4x+3>0$；
   （3）$\exists x_0 \in \mathbf{Q}$，$x_0^2=3$；　（4）$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$(x_0+2)(x_0-3)<0$.

设命题 p:$\sqrt{3}$是有理数，对它进行否定，可以得到一个新的命题“$\sqrt{3}$不是有理数”，在逻辑上用“非 p”来表示.

一般地，命题“非 p”指的是命题 p 的否定，记作“$\neg p$”.

例如：若命题 p 为“平行线相交”，则命题“非 p”指的是“平行线不相交”.

前面我们研究了全称量词命题和存在量词命题的一般概念，现在我们来研究含有一个量词的全称量词命题和存在量词命题的否定.

先来看前面提到的全称量词命题②，③，④，它们的否定分别是：

存在一个有理数，它不是实数. ⑨

$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+x_0+1\leqslant 0$. ⑩

$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2-1\leqslant 0$. ⑪

不难发现，命题②，③，④被否定后，全称量词变为存在量词，全称量词命题变为存在量词命题.

反过来，我们考察这些存在量词命题⑨，⑩，⑪，不难发现，它们的否定分别是命题②，③，④.

由此看来，全称量词命题的否定是一个存在量词命题，存在量词命题的否定是一个全称量词命题.

一般地，命题“$\forall x\in I$，$p(x)$”的否定是“$\exists x_0\in I$，$\neg p(x_0)$”;命题“$\exists x_0\in I$，$p(x_0)$”的否定是“$\forall x\in I$，$\neg p(x)$”.

通常，要判断一个全称量词命题是假命题，你只需举一个反例；要判断一个存在量词命题是假命题，就需要证明了.

例3 写出下列命题的否定，并指出经否定后所得命题的真假：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>x$；

(2) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2=x_0$；

(3) 方程 $x^2-10x+21=0$ 有一个根是偶数.

解 (1) 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>x$”的否定为“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2\leqslant x_0$”，这个命题是真命题.

(2) 命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2=x_0$”的否定为“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\neq x$”，这个命题是假命题.

(3) 命题“方程 $x^2-10x+21=0$ 有一个根是偶数”的否定是“方程 $x^2-10x+21=0$ 的每一个根都不是偶数”，这个命题是真命题.

练习

1. 写出下列命题的否定，并指出经否定后所得命题的真假：

(1) 所有三角形都是直角三角形；

(2) 对一切实数 x，都有 $|x|=0$；

(3) 有的四边形有一个内角是直角；

(4) 存在某个正整数 x_0，使得 $x_0^2=x_0+6$.

2. 设 $p(x)$：$(x-1)(x-3)\geqslant 0$. 分别判断下列命题的真假，并给出证明：

(1) $\forall x\in\mathbf{R}$，$p(x)$；

(2) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$p(x_0)$；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$\neg p(x)$；

(4) $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\neg p(x_0)$.

习题 2.2

1. 判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题：

(1) 正整数的平方根是无理数；

(2) 对任意实数 x，都有 $x^2>x-1$；

(3) 有些三角形的三条高相等；

(4) 存在某个边长为 1 的菱形，它的面积恰好为$\sqrt{2}$.

2. 对于下列各集合 M，试分别判断命题“$\forall x\in M$，$(x-2)(x-3)>0$”的真假：

(1) $M=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x<2$ 或 $x>3\}$；

(2) $M=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x>3\}$；

(3) $M=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\leqslant 2\}$.

3. 写出下列命题的否定，并指出经否定后所得命题的真假：

(1) 实系数一元二次方程一定有实数根；

(2) 存在一个有理数，它不是整数；

(3) $\exists x_0\in\mathbf{N}$，使 $x_0^3\leqslant x_0^2$；

(4) 平行四边形的对角线互相平分.

4. 设命题 p：对于所有的正整数 x 和 y，有 $xy<x+y$. 写出它的否定，并判断其真假.

复习题

A 组

1. （1）命题“如果 a，b 都是整数，那么 $a+b$ 是整数”的逆命题是____________________________.

（2）命题“三角形的三个内角中至少有一个不大于 $60°$”的否定是____________________________.

2. 设 $p(x)$：x 是 10 的约数，$q(x)$：x 是偶数，试判断下列命题的真假：

（1）$\forall x\in\mathbf{N}^*$，$p(x)$；

（2）$\exists x_0\in\mathbf{N}^*$，$p(x_0)$；

（3）$\forall x\in\mathbf{N}^*$，$q(x)$；

（4）$\exists x_0\in\mathbf{N}^*$，$q(x_0)$.

3. 下列各小题中，p 是 q 的什么条件？

（1）p：$b^2-4ac<0$，q：函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象在 x 轴上方；

（2）p：$|x-1|=2$，q：$x^2-2x-3=0$.

4. 设有命题“$\sqrt{7}$的值不超过 3”. 若将此命题看作是“$\neg p$”形式的命题时，写出命题 p.

5. 已知 p，q 都是 r 的必要条件，s 是 r 的充分条件，q 是 s 的充分条件，那么，

（1）s 是 q 的什么条件？

（2）r 是 q 的什么条件？

（3）p 是 q 的什么条件？

B 组

1. 设 x，$y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$成立的充要条件是 $xy>0$.

2. 用 $f(x)$表示正整数 x 被 5 除的余数. 判断下列命题的真假：

（1）对任意的正整数 x，$f(x+5)=f(x)$；

（2）对任意的正整数 x 和 y，$f(x+y)=f(x)+f(y)$；

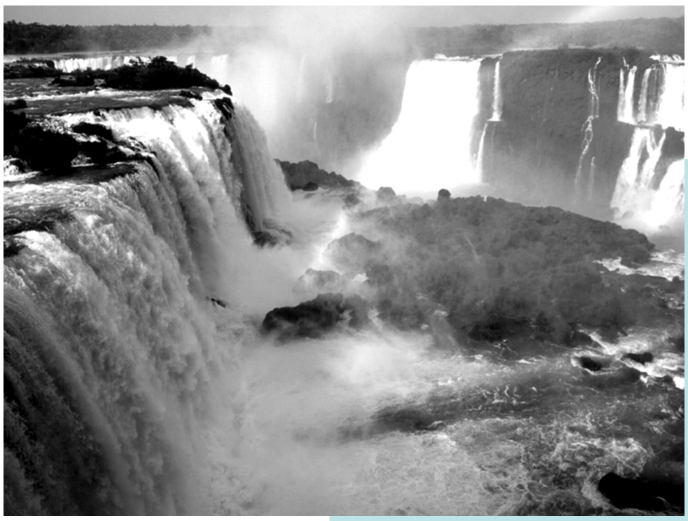
（3）对任意的正整数 x，存在正整数 y，使 $f(x+y)=f(5)$.

3. 已知 p：$-2\leqslant 1-\dfrac{x-1}{3}\leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$. 若$\neg p$ 是$\neg q$的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

思考与实践

在日常生活中，有很多说法是不准确的，甚至有逻辑错误. 请收集这方面的例子，并用“常用逻辑用语”的知识予以辨析，整理成小论文.

第3章 不等式初步



3.1　相等关系与不等关系

3.2　等式与不等式的性质

3.3　从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式

3.4　基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$

阅读与讨论:类比推理

复习题

思考与实践

我们知道，如果在不太甜的糖水中再加入一些糖，糖水就会变得更甜. 假定原来的糖水为 m 克，其中含糖 n 克，后加入糖 x 克，那么用来解释这种现象的数学关系式是

$$\frac{n}{m}<\frac{n+x}{m+x}.$$

这一事例表明，与相等关系一样，不等关系也是客观事物之间的基本数量关系.

关于不等关系，我们已学过一元一次不等式（组），然而，来自生产和生活实际问题中的不等关系往往更复杂，因此有必要对不等关系做进一步的研究.

在本章中，我们将学习不等式的有关性质，并从函数的观点出发，结合一元二次函数的图象理解一元二次方程的根和一元二次不等式的解集，培养直观想象、数形结合的能力.

我们还将学习一个应用非常广泛的基本不等式

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\ (a>0,\ b>0),$$

并学会利用基本不等式解决简单的最大（小）值的问题，提升逻辑推理、数学运算和数学建模等素养.

3.1 相等关系与不等关系

在现实世界和日常生活中，数量之间既有相等关系，例如，直角三角形斜边长的平方等于两直角边长的平方和；又存在着大量的不等关系，例如，太阳的质量比地球大，武汉冬季的平均气温比夏季低．当然，上面给出的这些数量间的不等关系是非常明显和直接的，而实际问题中的不等关系可能要复杂得多．

下面我们看两个问题，感受一下现实世界中存在着的一些不等关系．

问题 1 大自然是人类赖以生存发展的基本条件，为了提升生态系统持续性，某牧场每年供草量不超过 2.5 万吨．已知牧场每年供草量 y(单位：万吨)与羊的数量 x(单位：万只)满足函数关系 $y=0.15x$，则羊的数量 x 满足不等关系 $0.15x\leqslant 2.5$．

问题 2 某商店如果将一种进货单价为 1.6 元的商品按每件 1.9 元销售，每天可销售 500 件．根据市场调查，这种商品的售价每提高 0.1 元，销售量就相应减少 20 件．要使商店每天销售这种商品的利润超过 192 元，商品的售价应定在什么范围内？

若把提价后商品的售价设为 x 元，则销售量变为

$$500-\frac{x-1.9}{0.1}\times 20(\text{件}),$$

每天的利润为

$$\left(500-\frac{x-1.9}{0.1}\times 20\right)(x-1.6)(\text{元}),$$

则“每天销售这种商品的利润超过 192 元”可以表示为不等式

$$\left(500-\frac{x-1.9}{0.1}\times 20\right)(x-1.6)>192,$$

化简，得

$$x^2-6x+8<0.$$

求出这个不等式的解，就可知道商品的售价应定在什么范围内．

我们知道，任意两个实数 a，b 都能比较大小，并且有以下事实：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

由此可见，要比较两个实数 a，b 的大小，只要考察它们的差 $a-b$ 与 0 的大小关系即可.

例 1 已知 $a\in\mathbf{R}$，试比较 $(a+1)(a+3)$ 与 $(a+2)^2$ 的大小.

解 因为

$$\begin{aligned}&(a+1)(a+3)-(a+2)^2\\=&(a^2+4a+3)-(a^2+4a+4)\\=&-1<0,\end{aligned}$$

所以，$(a+1)(a+3)<(a+2)^2$.

例 2 已知 $m>n>0$，试比较 $\frac{n}{m}$ 与 $\frac{n+1}{m+1}$ 的大小.

解 因为

$$\frac{n}{m}-\frac{n+1}{m+1}=\frac{n-m}{m(m+1)},$$

又 $m>n>0$，所以

$$n-m<0,\ m(m+1)>0,$$

所以 $\frac{n-m}{m(m+1)}<0$，从而 $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$.

如果将例 2 中的“1”换成任意一个正实数 x，所得的大小关系还成立吗？你是否有什么发现？

练习

1. 用不等式表示下列关系：
   (1) a 与 b 的差是非负实数；
   (2) 已知 b kg 盐水中含盐 a kg$(b>a>0)$，若将盐水加热后蒸发水 m kg，且无盐结晶，试写出加热前后盐水浓度的大小关系式.
2. 比较 x^2+x 与 $3x-2$ 的大小.
3. 如果 $x>0$，比较 $(\sqrt{x}-1)^2$ 与 $(\sqrt{x}+1)^2$ 的大小.

习题 3.1

1. 已知 $a>2$，试比较 $a-\frac{1}{a}$ 与 $\frac{3}{2}$ 的大小.
2. 已知 $x>y$，$\lambda>0$，试比较 $\frac{x+y}{2}$ 与 $\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}$ 的大小.
3. 已知 $p^2+q^2=1$，试比较 x^2+y^2 与 $(px+qy)^2$ 的大小.

3.2 等式与不等式的性质

关于相等关系，我们比较熟悉，并且已经学过等式的一些基本性质，例如：

（1）$a=b \Leftrightarrow b=a$；

（2）$a=b$，$b=c \Rightarrow a=c$；

（3）$a=b \Rightarrow a+c=b+c$；

（4）$a=b \Rightarrow ac=bc$；

（5）$a=b$，$c=d \Rightarrow a+c=b+d$；

（6）$a=b$，$c=d \Rightarrow ac=bd$；

（7）$a=b \Rightarrow a^n=b^n \quad (n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2)$.

你能类比等式的性质并借助所学的知识，探究不等式的性质吗？

> 类比是一个伟大的引路人.
> ——波利亚（Polya）

仿照上面，将“$=$”换成“$>$”（或“$<$”）并适当增加条件，我们不难得出如下不等式的性质：

性质 1 $a>b \Leftrightarrow b<a$；

性质 2 $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$；

性质 3 $a>b \Rightarrow a+c>b+c$；

性质 4 $a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$；
$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$；

性质 5 $a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$；

性质 6 $a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

我们还可以根据性质 1，把以上的性质 2 至性质 5 表示为另一种形式.

下面仅给出性质 4 和性质 6 的证明，其余性质的证明由同学们自行完成.

性质 4 的证明 因为 $a>b$，所以 $a-b>0$.

若 $c>0$，根据两个正数的积仍是正数，得 $(a-b)c>0$，即 $ac-bc>0$，所以 $ac>bc$.

若 $c<0$，根据正数与负数的积是负数，得 $(a-b)c<0$，即 $ac-bc<0$，所以 $ac<bc$.

性质 6 的证明 因为 $a>b$，$c>0$，所以，由性质 4 可得

$$ac>bc. \qquad ①$$

又因为 $c>d$，$b>0$，所以，由性质 4 可得

$$bc>bd. \qquad ②$$

从而由①，②及性质 2 即可得到 $ac>bd$.

根据性质 6，如果 $a>b>0$，则依次可得到

$$a^2>b^2,\ a^3>b^3,\ a^4>b^4,\ \cdots$$

于是，我们可以得到与等式的性质(7)类似的不等式的如下性质：

$$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n \quad (n\in \mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2).$$

利用不等式的这些基本性质，我们能解决一些不等式问题.

例 1 已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$.

证明 因为 $c<d$，所以 $-c>-d$.

又因为 $a>b$，所以，由性质 5 可得 $a-c>b-d$.

例 2 已知 $a>b>0$，求证：$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

证明 因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{1}{ab}>0$.

由性质 4 可得 $a\cdot\dfrac{1}{ab}>b\cdot\dfrac{1}{ab}$，即 $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$.

所以，由性质 1 可得 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

练习

1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；　　(2) 若 $a>b$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

(3) 若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$；　　(4) 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$.

2. 已知 $a>b>0$，$c<0$，求证：$\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$.

3. 已知 $2<x<6$，$2<y<3$，分别求 $x+y$，$x-y$ 的取值范围.

习题 3.2

1. 比较下面两组数的大小：

(1) 4 与 $\sqrt{15}$；　　(2) $\sqrt{2}-1$ 与 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2. 比较下列各组中两个数的大小：

(1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ 与 x^2+x+1；

(2) 当 $x>-1$ 时，$\sqrt{2x+2}$ 与 $\sqrt{x+1}$；

(3) $(x+1)(x+4)$ 与 $(x+2)^2$.

3. 已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证：$\frac{a}{\sqrt{d}}>\frac{b}{\sqrt{c}}$.

4. 求证：$a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$，并指出等号成立的条件.

5. 某工厂现有甲种原料 360 kg，乙种原料 290 kg，计划利用这两种原料生产 A，B 两种产品共 50 件. 已知生产每一件 A 种产品需要甲、乙两种原料分别为 9 kg，3 kg，生产每一件 B 种产品需要甲、乙两种原料分别为 4 kg，10 kg. 问：按要求安排 A，B 两种产品的生产件数有哪几种方案？

3.3 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式

3.3.1 从函数观点看一元二次方程

我们先看下面两个问题：

(1) 解方程 $x^2-6x+8=0$；

(2) 自变量 x 为何值时，函数 $y=x^2-6x+8$ 的值为 0？

在问题(1)中，解方程 $x^2-6x+8=0$ 得 $x_1=2$，$x_2=4$.

在问题(2)中，函数 $y=x^2-6x+8$ 的值为 0，即 $y=0$，所以 $x^2-6x+8=0$. 要求所对应的自变量 x 的值，这可以通过解方程 $x^2-6x+8=0$，得出 $x_1=2$，$x_2=4$.

因此，这两个问题实际上是同一问题.

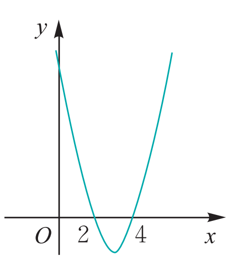


图 3-1

从函数图象(如图 3-1)看，抛物线 $y=x^2-6x+8$ 与 x 轴的公共点的坐标是(2,0)和(4,0)，这也说明，方程 $x^2-6x+8=0$ 的根是 $x_1=2$，$x_2=4$.

可见，一元二次函数与一元二次方程有着密切的联系.

一般地，从函数观点看，一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的

图象与 x 轴的公共点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根.

例1 分别画出下列一元二次函数的简图，结合图象判断相应的一元二次方程的实数根的情况，并用判别式加以验证.

（1）$y=x^2-2x-1$；

（2）$y=-x^2+4x-4$；

（3）$y=x^2-2x+2$.

解 （1）画出函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象(如图 3-2)，由图象可以看出，函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象与 x 轴有两个不同的公共点，从而相应的一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根.

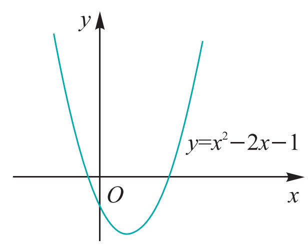


图 3-2

另一方面，因为一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的判别式

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8>0,$$

所以一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根.

（2）画出函数 $y=-x^2+4x-4$ 的图象(如图 3-3)，由图象可以看出，函数 $y=-x^2+4x-4$ 的图象与 x 轴只有一个公共点，从而相应的一元二次方程 $-x^2+4x-4=0$ 有两个相等的实数根.

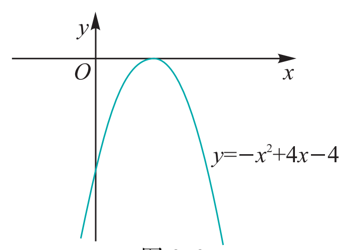


图 3-3

另一方面，因为一元二次方程 $-x^2+4x-4=0$ 的判别式

$$\Delta=4^2-4\times(-1)\times(-4)=0,$$

所以一元二次方程 $-x^2+4x-4=0$ 有两个相等的实数根.

（3）画出函数 $y=x^2-2x+2$ 的图象(如图 3-4)，由图象可以看出，函数 $y=x^2-2x+2$ 的图象与 x 轴没有公共点，从而相应的一元二次方程 $x^2-2x+2=0$ 没有实数根.

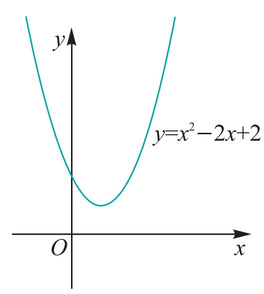


图 3-4

另一方面，因为一元二次方程 $x^2-2x+2=0$ 的判别式

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4<0,$$

所以一元二次方程 $x^2-2x+2=0$ 没有实数根.

我们把函数的图象与 x 轴的公共点的横坐标称为函数的**零点**(zero point).

显然，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根就是一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.

例如，一元二次方程 $x^2-6x+8=0$ 的实数根为 $x_1=2$，$x_2=4$，则 $x_1=2$，$x_2=4$ 是函数 $y=x^2-6x+8$ 的零点；又如，一元二次方程 $x^2-2x+2=0$ 没有实数根，则函数 $y=x^2-2x+2$ 没有零点.

练习

1. 借助一元二次函数的图象，判断下列一元二次方程实数根的情况.

   (1) $x^2-x-1=0$；　　(2) $x^2-x+1=0$；

   (3) $4x^2-12x+9=0$；　　(4) $-x^2+4x-3=0$.

2. 设 a 为实数，结合函数 $y=x^2+2x+a$ 的图象，讨论函数 $y=x^2+2x+a$ 的零点的个数.

3. 结合函数 $y=x^2+4x-a$ 的图象，讨论 a 分别取什么实数时，方程 $x^2+4x-a=0$：

   (1) 有两个不相等的负实数根；

   (2) 有一个正实数根和一个负实数根；

   (3) 有两个都比 1 小的实数根.

3.3.2 从函数观点看一元二次不等式

在 3.1 节问题 2 中，我们得到了如下不等式：

$$x^2-6x+8<0, \qquad ①$$

像这样只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式叫作**一元二次不等式**.

在上一节我们已经知道，一元二次函数与一元二次方程有着密切的联系.

例如，一元二次函数 $y=x^2-6x+8$ 的图象与 x 轴的公共点的横坐标即为一元二次方程 $x^2-6x+8=0$ 的根.

那么，一元二次函数与一元二次不等式之间又有怎样的联系呢?

对不等式①，我们令 $y=x^2-6x+8$，则不等式①的解集即为使函数值 $y<0$ 的自变量 x 的取值组成的集合，即$\{x|x^2-6x+8<0\}$.

所以，以下两个问题实际上是同一问题：

(1) 解不等式 $x^2-6x+8<0$；

(2) 当自变量 x 为何值时，函数 $y=x^2-6x+8$ 的值小于 0?

为此，我们先作出一元二次函数 $y=x^2-6x+8$ 的图象，如图 3-5. 则不等式①的解集就是函数的图象在 x 轴下方的点的横坐标的集合.

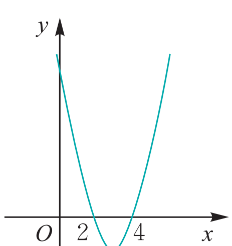


图 3-5

因为一元二次方程

$$x^2-6x+8=0 \qquad ②$$

的两个根(即一元二次函数 $y=x^2-6x+8$ 的零点)为 $x_1=2$，

$x_2=4$.

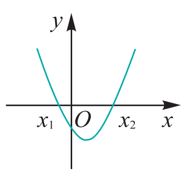
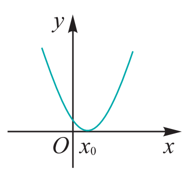
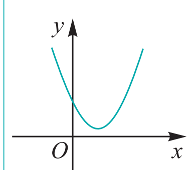
又由图 3-5 可以看出：当且仅当 $2<x<4$ 时，一元二次函数 $y=x^2-6x+8$ 的图象在 x 轴下方，即 $y<0$，亦即 $x^2-6x+8<0$，所以，不等式①的解集为

$$\{x \mid 2<x<4\}.$$

现在可以回答 3.1 节的问题 2：要使商店每天销售这种商品的利润超过 192 元，商品的售价范围应为(2，4).

请同学们合作交流完成下面的表格：

当 $a>0$ 时，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 $ax^2+bx+c<0$)的解集情况如下表：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=x_0$	没有实数根
一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集			

当 $a<0$ 时，情况又如何？

例 1 解下列不等式：

(1) $2x>-x^2+3$；　(2) $4x^2+4x+1\leqslant 0$；

(3) $4x^2+x+1>0$；　(4) $x^2+\frac{1}{2}x+1<0$.

解 (1) 原不等式可以变形为 $x^2+2x-3>0$，$\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)=16>0$，相应的一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的实数根为 $x_1=-3$，$x_2=1$，相应的一元二次函数 $y=x^2+2x-3$ 的图象开口向上，与 x 轴有两个公共点$(-3,0)$，$(1,0)$，所以原不等式的解集为$\{x \mid x<-3$，或 $x>1\}$.

(2) $\Delta=4^2-4\times4\times1=0$，相应的一元二次方程 $4x^2+4x+1=0$ 的实数根为 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$，相应的一元二次函数 $y=4x^2+4x+1$ 的图象开口向上，与 x 轴只有一个公共点 $\left(-\frac{1}{2}，0\right)$，所以原不等式的解集为 $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

(3) $\Delta=1^2-4\times4\times1=-15<0$，相应的一元二次方程 $4x^2+x+1=0$ 没有实数根，相应的一元二次函数 $y=4x^2+x+1$ 的图象开口向上，与 x 轴没有公共点，所以原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

可见一元二次不等式的解集是由一元二次函数的图象的开口方向及其与 x 轴的公共点的横坐标所确定.

(4) $\Delta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times1\times1<0$，相应的一元二次方程 $x^2+\frac{1}{2}x+1=0$ 没有实数根，相应的一元二次函数 $y=x^2+\frac{1}{2}x+1$ 的图象开口向上，与 x 轴没有公共点，所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

你能归纳总结出解一元二次不等式的步骤吗？

例2 若按现状生产，某化工厂从今年一月份算起的前 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月的利润为 $y=-n^2+68n$（万元）. 为了减少污染，化工厂今年一月份投资 590 万元增加污水回收净化设备（改造设备时间不计），那么前 n 个月的收入为 $y=109n-20$（万元），并且还可得到环保部门 100 万元的奖励. 试问：至少经过多少个月，投资改造后的利润不低于不改造时的利润？

解 设至少经过 n 个月，投资改造后的利润不低于不改造时的利润.

根据题意可得

$$109n-20+100-590\geqslant-n^2+68n.$$

移项整理，得

$$n^2+41n-510\geqslant0.$$

可求得一元二次方程 $n^2+41n-510=0$ 的两个不相等的实数根为

$$n_1=-51，n_2=10.$$

一元二次函数 $y=n^2+41n-510$ 的图象开口向上，与横轴有两个公共点 $(-51，0)$，$(10，0)$，所以，不等式 $n^2+41n-510>0$ 的解集为

$$\{n\,|\,n\leqslant-51，或\ n\geqslant10\}.$$

又由于 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant10$，即至少经过 10 个月，投资改造后的利润不低于不改造时的利润.

练习

1. 画出下列不等式所对应的一元二次函数的图象，再根据图象写出不等式的解集：

(1) $-x^2+3x+18>0$；　　(2) $-x^2+3x+18<0$.

2. 解下列不等式：

(1) $x^2>9$；　　(2) $x^2<2$；

(3) $-x^2+2x-1<0$；　　(4) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{6}x-1\leqslant 0$.

3. 若不等式 $mx^2+mx+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

4. 某杂志每本的成本为 6.5 元，现定价为 8.5 元，发行量为 10 万本. 杂志社为了扩大发行量，准备降低定价. 据市场调查知，定价每降低 0.1 元，发行量就相应增加 1 万本. 要使总利润不会减少，则杂志的定价应在什么范围?

习题 3.3

1. 借助一元二次函数的图象，判断下列一元二次方程实数根的情况.

(1) $x^2-x-6=0$；　　(2) $x^2+x+1=0$；

(3) $-2x^2+x+1=0$；　　(4) $x^2-2x-a^2=0$ (a 为实常数).

2. 集合 $A=\{x\,|\,x^2-3x-10\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\,|\,2x^2-x-6>0, x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 的元素的个数为(　　).

(A) 6　　(B) 5　　(C) 4　　(D) 无数个

3. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\,|\,|x|<a\}$. 若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是________.

4. 求函数 $y=\sqrt{2+x-x^2}$ 的自变量 x 的取值范围.

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m+2=0$ 的两个实数根的平方和大于 2，求实数 m 的取值范围.

6. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两个实数根都在区间 $[-2, 4]$ 内，求实数 m 的取值范围.

7. 若不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集为 $\{x\,|\,2<x<3\}$，求不等式 $bx^2-ax-1\geqslant 0$ 的解集.

8. 若对于任何实数 x，不等式 $kx^2-(k-2)x+k>0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

9. 某段河流汛期前水位高为 120 cm，水位警戒线高为 300 cm，水位超过警戒线时河堤就可能发生危险. 预测汛期到来时，水位线的提高量 l_0(单位：cm)与汛期天数 n 的函数关系是

$$l_0=20\sqrt{5n^2+12n}\quad (n\geqslant 1, n\in\mathbf{N}).$$

为了防止发生危险，河堤上有泄洪涵道，每天泄洪量可使水位线下降 40 cm. 如果从汛期来临的第一天起就开始泄洪排水，试问：从第几天起河堤可能会出现险情?

3.4 基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}(a>0,b>0)$

图 3-6 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会(ICM—2002)的会标，会标是根据我国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车.

在初中阶段，我们已从图 3-7 中找出了一些相等关系，如勾股定理，现在你能从中找出一些不等关系吗？

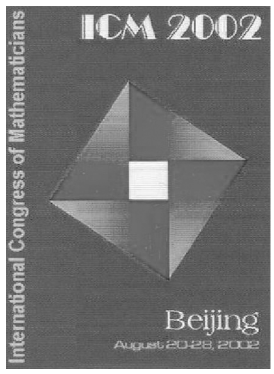


图 3-6

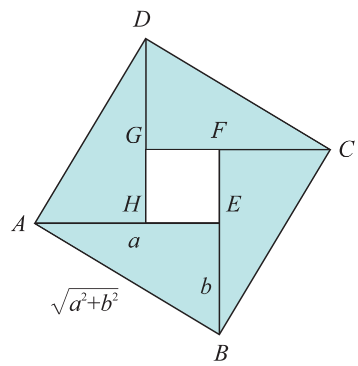


图 3-7

在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形. 显然图 3-7 中存在着不等关系：

正方形 $ABCD$ 的面积大于 4 个直角三角形的面积和.

设直角三角形的两条直角边的长分别为 a，$b(a\neq b)$，那么正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{a^2+b^2}$.

由上面的不等关系就得到了一个不等式

$$a^2+b^2>2ab.$$

当直角三角形变为等腰直角三角形，即 $a=b$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一个点，这时有

$$a^2+b^2=2ab.$$

一般地，对于任意实数 a，b，都有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

特别地，如果 $a>0$，$b>0$，我们用$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$分别代替 a，b，可得

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

通常我们把上式写作

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\ (a>0,\ b>0). \qquad (*)$$

以上是我们从几何图形中的面积关系获得的不等式，利用不等式的性质，也可以直接推导出这个不等式.

事实上，因为

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,$$

所以$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

定理　如果 a，b 是正数，那么

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

我们把这个不等式称为**基本不等式**(fundamental inequality)，其中$\sqrt{ab}$称为正数 a，b 的**几何平均数**，$\frac{a+b}{2}$ 称为正数 a，b 的**算术平均数**，因而，基本不等式又可叙述为：

两个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数.

如图 3-8，设 AB 是圆 O 的直径，点 D 是 AB 上一点，$AD=a$，$DB=b$，过 D 作 $CD\perp AB$ 交上半圆于点 C，连接 AC，BC，OC.

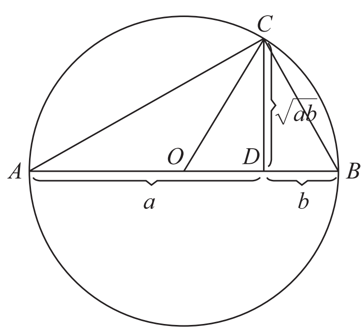


图 3-8

易证 $\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBD$，那么 $CD^2=AD\cdot BD$，即 $CD=\sqrt{ab}$.

这个圆的半径为 $OC=\frac{a+b}{2}$，显然，它大于或等于 CD，即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当点 D 与圆心 O 重合(即 $a=b$)时等号成立.

基本不等式“$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$”所表示的几何意义，可理解为“半弦长不大于半径”.

例1 已知 x，y 都是正数，

（1）如果 $xy=2$，求 $x+y$ 的最小值；

（2）如果 $x+y=2$，求 xy 的最大值.

解 因为 x，y 都是正数，所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

（1）当 $xy=2$ 时，$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{2}$，即

$$x+y\geqslant2\sqrt{2},$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立.

又因为 $xy=2$，因此，当 $x=y=\sqrt{2}$ 时，$x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$.

（2）当 $x+y=2$ 时，$\sqrt{xy}\leqslant1$，即

$$xy\leqslant1,$$

当且仅当 $x=y$ 时等号成立.

又因为 $x+y=2$，因此，当 $x=y=1$ 时，xy 取得最大值 1.

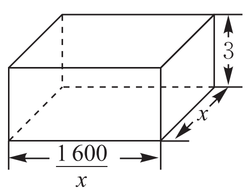


图 3-9

例2 某工厂建造一个长方体的无盖贮水池（如图 3-9），其容积为 4 800 m^3，深度为 3 m. 如果池底的造价为 150 元/m^2，池壁的造价为 120 元/m^2. 怎样设计水池能使总造价最低？最低总造价是多少元？

解 设水池底面一边的长度为 x m($x>0$)，因为底面面积为 $\frac{4\ 800}{3}=1\ 600$ (m^2)，所以另一边的长度为 $\frac{1\ 600}{x}$ m，则池壁的面积为 $6\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)$ m^2.

设水池总造价为 y 元，则

$$\begin{aligned} y&=150\times1\ 600+120\times6\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)\\ &=240\ 000+720\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)\\ &\geqslant240\ 000+720\times2\sqrt{x\cdot\frac{1\ 600}{x}}\\ &=240\ 000+720\times2\times40\\ &=297\ 600. \end{aligned}$$

当且仅当 $x=\frac{1\ 600}{x}$，即 $x=40$ 时，等号成立.

所以，当池底长、宽均为 40 m 时，总造价最低，最低总造价为297 600元.

例3 某化工厂让污水依次流过甲、乙两个污水处理池，用来除去污水中的杂质. 现考虑用两种方案来处理. 用第一种方案时，经过甲池后污水中的杂质剩下原有的 $a\%$，经过乙池后污水中的杂质剩下入乙池时的 $b\%$. 用第二种方案时，经过甲、乙池后污水中的杂质均剩下入池时的$\frac{a+b}{2}\%$. 问：用哪一种方案能较多地除去污水中的杂质?

解 设污水中含有的杂质总量为 1 个单位.

若用第一种方案，经过甲池处理后污水中的杂质剩下原有的 $a\%$，再经过乙池处理后污水中的杂质剩下入乙池时的 $b\%$，则两次处理后污水中的杂质只剩下 $a\%\cdot b\%=\frac{ab}{10\ 000}$；

若用第二种方案，经过甲池处理后污水中的杂质剩下原有的$\frac{a+b}{2}\%$，再经过乙池处理后污水中的杂质剩下入乙池时的$\frac{a+b}{2}\%$，则两次处理后污水中的杂质只剩下 $\left(\frac{a+b}{2}\%\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\%\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{10\ 000}$.

问题归结为比较$\frac{ab}{10\ 000}$与$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{10\ 000}$的大小.

因为$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立），所以 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，所以

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{10\ 000}\geqslant\frac{ab}{10\ 000}.$$

以上结果表明：

当 $a=b$ 时，用两种方案除去污水中的杂质一样多；

当 $a\neq b$ 时，用第一种方案能较多地除去污水中的杂质.

练习

1. 判断下列结论是否正确：

（1）如果 a，$b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2>2ab$；

（2）如果 a，$b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant-2ab$；

（3）如果 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a\neq b$，那么 $a^2+b^2>2ab$；

（4）如果 a，b 是正数，那么 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$；

（5）如果 $a\leqslant0$，$b\leqslant0$，那么 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

2. 当 x 为何值时，函数 $y=9x+\frac{1}{4x}(x>0)$ 取得最小值？

3. 下列函数中，当 x 为何值时，函数取得最大值？

(1) $y=\sqrt{x(1-x)}\,(0<x<1)$；

(2) $y=x(2-3x)\left(0<x<\frac{2}{3}\right)$；

(3) $y=x+\frac{1}{x}(x<0)$.

4. 在半径为 30 cm 的半圆形铝皮上截取一块矩形材料，矩形的两个顶点在直径上，其余两个顶点在圆周上．怎样截取才能使矩形的面积最大？并求出最大面积.

习题 3.4

1. 设 $0<a<b$，则下列不等式中正确的是（　　）.

(A) $a<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　(B) $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

(C) $a<\sqrt{ab}<b<\frac{a+b}{2}$　　(D) $\sqrt{ab}<a<\frac{a+b}{2}<b$

2. (1) 当 x 为何值时，函数 $y=1-2x-\frac{3}{x}(x<0)$ 取得最小值？

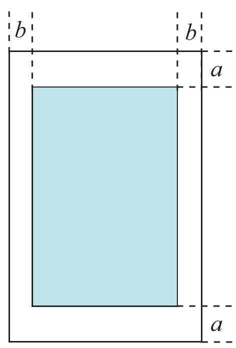
(2) 当 x 为何值时，函数 $y=1-2x-\frac{3}{x}(x>0)$ 取得最大值？

3. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

4. 已知 x，y 都是正数，且 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值.

5. 如果直角三角形的周长为 1，求它的面积的最大值.

6. 印刷厂在设计版面时，除了应考虑美观大方、方便实用外，还应考虑节约纸张．现设在一页纸上所印的文字要占 216 cm^2（图中阴影部分），上下要留 $a=3$ cm 宽的空白，左右要留 $b=2$ cm 宽的空白．若从节约纸张的角度考虑，则该页纸的长度 x 和宽度 y 应设计成什么样的尺寸篇幅最为有利（即一页纸的面积 $S=xy$ 最小）？



（第 6 题图）

类比推理

数学离不开推理．著名数学家陈省身曾经说过："数学是什么？数学是根据某些假设用逻辑的推理得到结论．"类比推理就是其中一类非常典型和有用的推理方法．

什么是类比推理呢？我们不妨先看几个例子．

喜欢看科幻片的同学们肯定看过以外星生命为题材的科幻片，比如《阿凡达》《长江七号》《火星宝贝》等．真的存在外星生命吗？这是一种凭空幻想还是有依据的推理？

为了回答这个问题，科学家们把火星与地球作了类比：

地球	火星
绕太阳公转、绕轴自转	绕太阳公转、绕轴自转
有大气层	有大气层
一年中有季节变更	一年中有季节变更
温度适合生物生长	大部分时间的温度适合地球上某些生物生长

基于以上的比较，既然地球上有生命存在，科学家猜想，火星上也可能有生命存在．

再如，传说春秋时代，鲁国的公输班受到路边的齿形草能割破行人腿的启示，发明了锯子．他的思维过程为：齿形草能割破行人的腿，"锯子"就能"锯"开木材，它们在功能上是类似的．

运用这种推理方法的例子还有很多，比如奥地利医生奥恩布鲁格观察到父亲经常用手指敲击盛酒的木桶，根据声音推测桶内的酒还剩多少，他联想到胸腔和酒桶有类似之处，从而发明了叩诊法——通过叩击人体胸腔的方法判断其中有无积水或积水的多少．

可见，类比推理就是根据两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理方法(简称类比)．类比推理是由特殊到特殊的推理．

类比推理的步骤大致分为两步：

(1) 寻找合适的类比对象；

(2) 由一类对象的已知特征推测另一类对象也具备这些特征，得出一个猜想.

类比推理的模式大致有两种：

(1) A 具有性质 a，b，c，d，B 具有性质 a，b，c，则 B 也可能具有性质 d；

(2) A 具有性质 a，b，c，d，B 具有性质 a'，b'，c'，且分别与 a，b，c 相似，则 B 可能具有性质 d'，且 d' 与 d 相似.

类比是科学研究中常用的方法之一，被誉为科学活动中“伟大的引路人”“人类知识的核心”.

数学学习中也经常用到类比推理方法，比如前面对不等式的性质的研究中，我们也类比了等式的性质：

等式的性质	不等式的性质
若 $a=b$，则 $a+c=b+c$	若 $a>b$，则 $a+c>b+c$
若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$	若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$

除此之外，数学中的数与式之间、一元与多元之间、低次与高次之间、平面与空间之间、有限与无限之间都可以进行类比，有不少定理、法则常常是先用类比猜想出结论，然后加以严格证明.

类比是数学学习中具有较大思维创新价值的一种思想方法．著名的天文学家开普勒有句名言：“我珍视类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师，它能揭示自然界的秘密，它应该是最不容忽视的.”类比是创新的一种手段．因为有了类比，在研究问题时，我们可以跳出一定的框架，不受现有知识的约束，根据其中的思想方法、表现形式等，再结合其他的知识、方法，大胆提出设想，找到具有创新性的解题方法．运用类比思想方法可以使得知识得到迁移，思维得到升华.

类比是一种大胆合理的推理．一般来说，由类比推理所获得的结论，仅仅是一种猜想，未必可靠，类比时分析问题的角度不同也会得出不同的推理结果，结果是否正确是需要证明的.

复习题

A 组

1. 使$\dfrac{x}{y}>1$成立的一个充分不必要条件是（　　）.

(A) $x>y$　　(B) $x>y>0$

(C) $x<y$　　(D) $y<x<0$

2. 已知 $a>b>0$，求证：$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

3. 求证：$a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$，并指出等号成立的条件.

4. 已知一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\right\}$，试求不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集.

5. 解下列不等式：

(1) $x^2-2x-15>0$；

(2) $-x^2-3x+10>0$.

6. 设 m 为实数，判断一元二次函数 $y=x^2+(m-3)x+m$ 的零点的个数.

7. 当 a 取何值时，关于 x 的一元二次不等式$(a^2+4a-5)x^2-4(a-1)x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$?

8. 已知 $0<x<\dfrac{1}{2}$，求函数 $y=\sqrt{x(1-2x)}$的最大值.

9. 已知 $x>1$，求函数 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$的最小值.

10. 某人计划建造一间地面面积为 12 m² 的背面靠墙的长方体房屋，房屋正面的造价为1 200 元/m²，房屋两侧面的造价为 800 元/m²，屋顶的造价为5 800 元/m². 如果墙高为 3 m，且不计房屋背面和地面的费用，问：怎样设计房屋能使工程总造价最低？最低工程总造价是多少元?

B 组

1. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，那么（　　）.

(A) $a>ab>ab^2$　　(B) $ab^2>ab>a$

(C) $ab>a>ab^2$　　(D) $ab>ab^2>a$

2. 已知 $a>b>0$，比较$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$和$\dfrac{a-b}{a+b}$的大小.

3. 设 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，$a^2+\dfrac{b^2}{2}=1$，则 $a\sqrt{1+b^2}$的最大值为________.

4. 解下列不等式：

(1) $x^2-2|x|-15>0$；

(2) $-4<x^2-5x+2\leqslant 26$.

5. 已知$-1<x<6$，$2<y<3$，分别求 $x+y$，$x-y$，xy，$\dfrac{x}{y}$的取值范围.

6. 已知 x，y，$z\in(0,+\infty)$，且满足 $x-2y+3z=0$，求$\dfrac{y^2}{xz}$的最小值.

7. 甲、乙两人同时从 A 地出发，沿同一条线路步行到 B 地. 甲在前一半时间的行走速度为 a，后一半

时间的行走速度为 b；乙在前一半路程的行走速度为 a，后一半路程的行走速度为 b. 若 $a\neq b$，那么甲、乙两人谁先到达 B 地？

8. 某公司投资 5 万元，成功研制出一种市场需求量较大的高科技替代产品，并投入资金 15 万元进行批量生产. 已知生产每件产品的成本为 4 元，在销售过程中发现：当销售单价定为 10 元时，年销售量为 2 万件；销售单价每增加 1 元，年销售量将减少 0.1 万件. 设销售单价为 x 元，年获利(年获利＝年销售额－生产成本－投资) y 万元.

(1) 试写出 y 与 x 之间的函数关系式(不必写出 x 的取值范围)；

(2) 公司计划：在第一年按年获利最大确定的销售单价进行销售，第二年年获利不低于 11.3 万元. 请问第二年的销售单价应定在什么范围内？

思考与实践

1. 某市一次征兵体检中，要查清众多应征者中是否有携带某种传染病毒者. 每次检查需通过一项成本高且耗时久的血液化验. 据医学统计知，该病毒携带者所占的比例很小，为节省化验费用和时间，采取一种叫“群试”的方法. 先把从每位应征者身上抽取的血液分成两部分，一份保存备用，另一份分组混合在一起. 混合的每组化验一次，若某组化验结果合格，则整个组的应征者合格；若化验结果不合格，说明这组中有病毒携带者，进而再用备用血逐个化验. 若该市有10 000名应征者，假设病毒携带者占千分之二点五，每化验一次花费 30 元. 试研究如下问题：

(1) 若群试时将人数平均分成 25 组，群试的费用一定比逐个化验的费用少吗？

(2) 设群试时将人数平均分成 n 组，当 n 为何值时群试的费用比逐个化验的费用少？

2. 把一个物体放在天平的一个托盘上，在另一个托盘上放砝码使天平平衡，称得物体的质量为 a. 如果天平制造得不精确，天平的两臂长略有不同(其他因素不计)，那么 a 并非物体的实际质量. 不过我们可作第二次测量：把物体调换到天平的另一个托盘上，此时称得物体的质量为 b. 有人说：两次称量结果的和的一半 $\frac{a+b}{2}$ 就是物体的真实质量. 这种说法对吗？如果不对，物体的真实质量 M 又是多少呢？M 和 $\frac{a+b}{2}$ 哪个大呢？证明你的结论.

后　　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，依据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》，我们组织专家学者编写了这套普通高中数学教科书.

在本套教科书的编写过程中，我们得到了许多数学教育界前辈、数学课程专家、数学教育理论工作者、中学数学教研员和教师的大力支持和热情帮助，我们对他们的辛勤付出表示衷心的感谢. 我们还要特别感谢华中师范大学数学与统计学学院对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持.

本套教科书是全体编写人员集体智慧的结晶. 除已列出的主要编写者外，参加本册教科书编写讨论的还有：岑爱国、彭树德、杨田、徐新斌、高保中、殷希群、吴爱国、田杰、张琴、孙昕等.

我们还要感谢使用本套教科书的师生们，期待你们在使用本套教科书的过程中，及时把意见和建议反馈给我们，以便我们进一步修改完善.

责任编辑　田　杰　张　琴
封面设计　牛　红　刘静文

普通高中教科书　数学　必修　第一册

出　版	湖北教育出版社	430070　武汉市雄楚大街 268 号
经　销	新　华　书　店	
网　址	http://www.hbedup.com	
印　刷	武汉中远印务有限公司	
开　本	890mm×1240mm　1/16	
印　张	3.5	
字　数	80 千字	
版　次	2019 年 11 月第 1 版	
印　次	2023 年 2 月第 2 次印刷	
书　号	ISBN 978-7-5564-3685-9	
定　价	3.80 元	